

Giorgio Israel Ana Millán Gasca

Pensare in matematica

Gli autori

Giorgio Israel è professore ordinario di Matematiche complementari presso l'Università di Roma «La Sapienza». È membro della *Académie Internationale d'Histoire des Sciences* ed è stato direttore di studi invitato all'*École des Hautes Études en Sciences Sociales* (Parigi). Tra i suoi libri: *The Invisible Hand* (con B. Ingrao, MIT Press, 1990), *La visione matematica della realtà* (Laterza, 2012, 4a ed.), *La macchina vivente* (Bollati Boringhieri, 2004), *Chi sono i nemici della scienza?* (Lindau, 2008, Premio Capalbio), *Il fascismo e la razza. La scienza italiana e le politiche razziali del regime* (Il Mulino, 2010).

Ana Millán Gasca è professore associato di Matematiche complementari presso l'Università Roma Tre. Tra i suoi libri: *All'inizio fu lo scriba. Piccola storia della matematica come strumento di conoscenza* (Mimesis, 2009), *Fabbriche, sistemi, organizzazioni. Storia dell'ingegneria industriale* (Springer, 2005), *Euclides. La fuerza del razonamiento matemático* (Nivola, 2004).

L'opera

La matematica circonda la nostra vita quotidiana ed è evidente l'importanza di una buona formazione in questa disciplina, che è ostica per la sua astrazione e temuta per la sua difficoltà.

Pensare in matematica propone un incontro con la matematica come parte della cultura, mostrando la potenza dei suoi concetti, che sfidano il concetto di infinito eppure sono radicati nell'esperienza e nell'agire umano.

Agli studenti di Scienze della formazione primaria è offerta una visione degli aspetti tecnici, storici e didattici dell'aritmetica e della geometria elementare, allargando il panorama a tematiche come la probabilità, la statistica e la matematica applicata. Si propone un approccio al mondo dei numeri e delle forme capace di destare la curiosità della mente infantile e di accompagnarla nella sua maturazione intellettuale.

L'opera si rivolge anche agli insegnanti e ai genitori interessati a seguire i figli nei primi passi in questo mondo, e a qualsiasi persona che voglia accostarsi alla matematica o voglia correggere le nozioni apprese a scuola in modo meccanico e presto dimenticate. Attraverso esempi e idee attuali ma con uno sguardo alla storia, il lettore sentirà la matematica non come una disciplina isolata e "aliena", ma come una delle maggiori conquiste dello spirito umano.

Il sito web



All'indirizzo www.online.zanichelli.it/israel sono disponibili esercizi supplementari ed esempi da proporre agli alunni della scuola primaria.

ISRAEL*MILLAN-GASCA*PENSARE IN MAT

ISBN 978-88-08-19361-2



9 788808 193612

3 4 5 6 7 8 9 0 1 (60B)

Al pubblico € 00,00 •••

* In caso di variazione Iva o cambiamento prezzo all'inizio di anni successivi, consultare il catalogo dell'editore

www.zanichelli.it

Israel
Millán Gasca

Pensare in matematica



Giorgio Israel Ana Millán Gasca

Pensare in matematica

Con sito web



ZANICHELLI

ZANICHELLI

Nelle edizioni Zanichelli

Opere di consultazione

Baruk, **Dizionario di matematica elementare**

Analisi e matematica generale

Adams **Calcolo differenziale** 1 (Cea)

Adams **Calcolo differenziale** 1 (Cea)

Antognini, Barozzi **Matematica e Mathematica**

Avvantaggiati **Analisi matematica** 1 (Cea)

Avvantaggiati **Analisi matematica** 2 (Cea)

Avvantaggiati **Istituzioni di matematica** (Cea)

Barozzi **Primo corso di analisi matematica**

Barozzi, Dore, Obrecht **Elementi di analisi matematica** 1

Barozzi, Matarasso **Analisi matematica**

Benedetto, Degli Esposti, Maffei **Matematica per le scienze della vita** (Cea)

Binmore **Calcolo differenziale di più variabili** (Cea)

Boieri, Chiti **Precorso di matematica**

Bramanti, Pagani, Salsa, **Matematica** (2ª edizione)

Bramanti, Pagani, Salsa **Analisi matematica** 1

Bramanti, Pagani, Salsa **Analisi matematica** 2

Bramanti, Travaglini **Matematica. Questione di metodo**

Chiantini **Algebra lineare e geometria analitica** (Cea)

Davis **Il mondo dei grandi numeri**

De Marco **Analisi zero** (3ª edizione)

De Marco **Analisi Uno** (2ª edizione - Decibel)

De Marco **Analisi Due** (2ª edizione - Decibel)

De Marco, Mariconda **Esercizi di analisi due** (Decibel)

De Marco, Mariconda **Esercizi di calcolo in una variabile** (Decibel)

Ghizzetti, Rosati **Analisi matematica** (Masson – 2ª edizione)

Israel, Millan Gasca **Pensare in matematica**

Pagani, Salsa **Analisi matematica** (Masson - 2 volumi)

Pagani, Salsa **Matematica** (Masson)

Pagani, Salsa **Serie di funzioni ed equazioni differenziali**

Ritelli, Bergamini, Trifone **Fondamenti di matematica**

Roggero, Ferrarese **Matematica zero** (Cea)

Salsa, Squellati **Esercizi di matematica** (2 volumi)

Salsa, Squellati **Esercizi di analisi matematica** (2 volumi)

Salsa, Squellati **Esercizi di analisi matematica II** (Masson – 3 volumi)

Thomas Jr., Finney **Elementi di analisi matematica e geometria analitica**

Torrigiani **Ripensare matematica. In preparazione alle facoltà universitarie scientifiche**

Probabilità, Statistica e Matematica ánanzaria

Bolzani, Canestrari **Logica del test statistico** (Cea)

Bolzani **Problema di statistica** (Cea)

Carbonaro, Vitale **Fondamenti di probabilità e statistica** (Cea)

Contucci, Isola **Probabilità elementare**

Dall'Aglio **Calcolo delle probabilità** (3ª edizione)

De Giuli; Giorgi, Maggi, Magnani **Matematica per l'economia e la finanza**

Invernizzi, Rinaldi, Sgarro **Moduli di matematica e statistica**

Letta **Probabilità elementare**

Montanari, Agati, Calò **Statistica** (Cea)

Monti Pierobon **Teoria della probabilità** (Decibel)

Nash **Giochi non cooperativi e altri scritti**

Ottaviani **Riassunto delle lezioni di matematica attuariale**

Scozzafava **Incertezza e probabilità**

Scozzafava **Primi passi in probabilità e statistica** (Decibel – 2ª edizione)

Toscano **Training autogeno in probabilità** (Decibel/ Zanichelli, rist. aggiornata)

Chiavi di lettura

Acheson **1089**

Armadori, Balzani **Energia per l'Astronave Terra** (2ª edizione)

Atkins **Il regno periodico**

Atkins **Le regole del gioco**

Bianucci **Te lo dico con parole tue**

Bignami **I Marziani siamo noi**

Bisconti **Le culture degli altri animali**

Bressanini **Ogm**

Cremaschi, Giomi **Rumore bianco**

Gardner **Dracula, Platone e Darwin**

Haw **Nel mondo di mezzo**

Ludwig, Guerrerio **La scienza nel pallone**

Pacchioni **Quanto è piccolo il mondo**

Rappuoli, Vozza **I vaccini dell'era globale**

Regis **Cosa è la vita?**

Rizzolatti, Vozza **Nella mente degli altri**

Rubalcaba, Robertshaw **Gli antenati**

Secord, Carroll, Jones, Seabright, Duprè **Darwin**

Weinstein, Adam **Più o meno quanto?**

Saggi

Feynman **Che t'importa cosa dice la gente?**

Feynman **Stai scherzando, mr. Feynman!**

Goodstein **Vito Volterra**

Maffei, Fiorentini **Arte e cervello**

Maltese **Il papa e l'inquisitore**

Nüsslein-Volhard **Il divenire della vita**

Segrè **Enrico Fermi, fisico**

Smullyan **Qual è il titolo di questo libro?**

Squire, Kandel **Come funziona la memoria**

Walker **Il luna park della fisica** (2ª edizione)

UNA SCOMMESSA DI CIVILTÀ

La nuova legge italiana sulle fotocopie è chiara.

È possibile fotocopiare una parte di un libro (fino al 15%) pagando, tramite la SIAE, all'autore e all'editore un prezzo proporzionato alla parte riprodotta.

In questo modo, chi ha bisogno di leggere alcuni capitoli può evitare di acquistare l'opera intera.

Ma la fotocopia di tutto o di gran parte di un libro è illecita: induce al mancato acquisto, rendendo così vano il lavoro di chi il libro lo ha scritto, redatto, composto, impaginato e illustrato.

La legge si propone lo scopo di tenere vivo l'interesse a scrivere libri.

Se questo interesse venisse a mancare, ben pochi libri nuovi sarebbero pubblicati: saremmo tutti costretti a leggere fotocopie, ormai illeggibili, di libri vecchi e non aggiornati.

Fotocopiare tutto un libro è un po' come lasciare un'auto in seconda fila: i più non lo fanno, non solo per paura della multa, ma soprattutto perché si rendono conto che, se tutti si comportassero così, ne deriverebbe un danno generale.

Sta quindi ai lettori far sì che la legge funzioni e produca effetti positivi.

È una scommessa di civiltà: se la si vince, il premio non andrà solo ad autori ed editori, ma a tutto il sistema culturale e scientifico italiano.

- Nel sito www.zanichelli.it/f_info_fotocopie.html la normativa.

Nello stesso sito si darà comunicazione del giorno in cui la nuova normativa acquisterà piena efficacia.

La piena efficacia della nuova normativa infatti è subordinata alla stipulazione di accordi fra le categorie interessate.

L'editore mette a disposizione degli studenti non vedenti o con particolari problemi di apprendimento una copia dei file, solitamente in formato pdf, in cui sono memorizzate le pagine di questo libro. Il formato dei file permette l'ingrandimento dei caratteri del testo. I docenti o i responsabili educativi possono richiedere i file scrivendo a: Zanichelli - Direzione Generale - Via Irnerio 34 - 40126 Bologna

Introduzione

L'idea di questo libro è nata dalle esperienze che il secondo autore ha avuto nell'insegnamento della matematica e della didattica della matematica per il corso di laurea in Scienze della formazione primaria,¹ il quale è volto alla formazione universitaria di coloro che dovranno insegnare nel ciclo scolastico primario. Pertanto, la prima motivazione era di realizzare un manuale adatto a corsi di questo tipo e che rappresentasse anche un ausilio per gli insegnanti della scuola primaria e dell'infanzia nell'aggiornamento della formazione matematica nel corso della carriera. In seguito, l'ambizione del libro, pur restando legata a questa ispirazione originaria, si è allargata. Perché e in che senso si sia allargata si può spiegarlo rispondendo alla domanda su che cosa debba contenere un manuale rivolto alla formazione dei futuri maestri. Dovrà limitarsi a presentare niente più che gli argomenti di matematica che verranno insegnati ai bambini nel ciclo scolastico primario, magari con il contorno di indicazioni di metodologia didattica? La risposta, a nostro avviso, è negativa, e non solo perché un libro del genere si differenzerebbe poco da un testo scolastico direttamente rivolto ai bambini, ma soprattutto perché siamo convinti che a un maestro capace di introdurre la mente infantile in un mondo complesso come quello della matematica è richiesta una conoscenza profonda di quel mondo. Siamo di fronte a un paradosso che vale per la matematica come per ogni disciplina: l'insegnamento ai livelli superiori richiede una dose molto elevata di nozioni e di strumenti complicati, ma comporta un dispiego minore di sforzo didattico; l'insegnamento *in forma elementare* dei concetti di base esige una padronanza delle loro sottigliezze e delle innumerevoli difficoltà che sono state affrontate nel corso di secoli di riflessioni e di elaborazioni. Ciò che viene direttamente insegnato ai bambini può sembrare poca cosa in termini di quantità di concetti e metodi, ma la chiarezza e l'efficacia dell'insegnamento dipende da un retroterra di comprensione approfondita che, pur restando dietro le quinte, ha un ruolo decisivo.

I pilastri su cui poggia la matematica sono il *numero* e la *forma*, ovvero l'*aritmetica* e la *geometria*. Il compito straordinariamente impegnativo del maestro è di introdurre il bambino nel mondo dei numeri e nel mondo delle figure geometriche, di abituarlo a muoversi in modo spontaneo in questi mondi e ad avere un rapporto di *familiarità*, di *intimità* con gli oggetti che li popolano e poi, man mano, ad acquisire gli strumenti per manipolarli.² Per riuscire a realizzare un obiettivo così ambizioso il maestro deve addentrarsi nei concetti di base della matematica esplorandoli più di quel che può sembrare necessario a prima vista; a meno che non si concepisca la matematica come una scienza meramente "procedurale" – ovvero come un insieme di regole operative – come viene malamente detto da qualcuno. La capacità

1. Presso la Facoltà di Scienze della formazione dell'Università di Roma Tre.

2. Esiste oggi un sostanziale accordo internazionale sui contenuti della matematica nel ciclo elementare, ma manca spesso una visione culturale d'insieme che possa guidare i maestri nelle scelte didattiche, nell'organizzazione e nella conduzione della lezione di matematica.

di manipolare efficacemente gli oggetti della matematica nasce soltanto in stretta relazione con l'acquisizione del loro significato concettuale, sia pure al livello intuitivo e primitivo proprio del bambino. Al maestro si chiede – quasi più che a qualsiasi altro insegnante di matematica – di aver penetrato a fondo il senso dei concetti della matematica, del suo operare, di aver compreso la complessità di una disciplina che non è “procedurale” ma neppure logica pura, o sinonimo del pensiero razionale; di una disciplina che ha un rapporto profondo con lo studio della natura ma non si identifica con esso; della disciplina scientifica che ha raccolto la sfida di manipolare il concetto di infinito. Hermann Weyl definì la matematica come «la scienza dell'infinito»: anche questo tema viene incontro al maestro nelle sue esperienze didattiche, perché una delle prime domande che si pongono i bambini, dopo aver sperimentato che si può sempre costruire un numero più grande di un altro, è “quanti” numeri esistano, e se esistano “tutti” i numeri. Un bambino che costruisce un quadrato unendo quattro asticelle si rende conto con stupore, deformando la figura con un semplice movimento delle mani, che esistono infiniti rombi con i lati uguali a quelli del quadrato. Nell'affrontare il difficile compito di dare risposta a queste domande e di dare spazio a queste “scoper-te”, tanto formulate in modo ingenuo quanto profonde, il maestro deve avere nel suo retroterra culturale la conoscenza del rapporto della matematica con l'infinito. Questo tema evoca lo stretto rapporto che la matematica ha con la filosofia e, più in generale, con la cultura, rapporto che ruota attorno al tema della ricerca della verità e della conoscenza del mondo.

Nel rapporto multiforme della matematica con la scienza, la conoscenza, la filosofia, la cultura risiede la chiave per superare il famigerato ostacolo nell'apprendimento della matematica e cioè il suo carattere di disciplina ostica, tecnica, arida, persino repellente. Difatti, soltanto se si comprende a fondo il senso dei suoi concetti anche le tecniche e le procedure diventano interessanti e persino affascinanti, e si impongono come indispensabili all'acquisizione della materia.

Da quanto precede si intende perché siamo convinti dell'importanza di un'impostazione “culturale” e non meramente tecnica (anche se attenta a una presentazione precisa e rigorosa dei metodi e delle tecniche). Ne consegue che, a nostro avviso, questo testo non è soltanto un *manuale per i maestri* ma anche un libro che può servire in qualsiasi corso universitario di *didattica della matematica* (che si tratti di lauree magistrali per l'insegnamento, di laboratori o corsi didattici legati ai tirocini a scuola) e che, più in generale, *può servire a chiunque sia interessato a introdursi alla matematica* pur non sapendone assolutamente nulla (o tutt'al più avendone pochissime reminiscenze). Difatti, il percorso del bambino per accedere al mondo dei numeri e delle forme geometriche contiene o rappresenta molte delle difficoltà cui va incontro qualsiasi persona voglia introdursi alla matematica sapendone poco o niente, o voglia rinfrescare le nozioni apprese a scuola in modo meccanico e presto dimenticate.

Abbiamo detto che i pilastri su cui poggia la matematica sono l'*aritmetica* e la *geometria*, ovvero il *numero* e le *forme geometriche*. Siamo partiti dallo studio dei numeri – oggetto dei Capitoli da 2 a 6 –, ma si sarebbe potuto partire altrettanto legittimamente dallo studio della geometria, cui abbiamo

riservato i Capitoli 7 e 8. Prendere le mosse dalla geometria sarebbe stato più aderente al processo storico reale: di fatto, le difficoltà incontrate nello studio del sistema dei numeri indussero i Greci antichi a privilegiare un approccio puramente geometrico e soltanto molti secoli dopo, nella modernità, la matematica affrontò le enormi difficoltà dell'aritmetica introducendo a pieno titolo il numero nella geometria, con la geometria analitica. Tale combinazione di numeri e geometria, che è alla base dell'*analisi matematica*, aprì la strada a straordinari sviluppi che sono il fondamento dell'efficacia pratica della matematica, in particolare nello studio dei fenomeni fisici e nella tecnologia; il che dimostra come un'enorme potenza pratica sia derivata dall'aver affrontato un problema prettamente teorico come quello della manipolazione dell'infinito. Tuttavia, questo non è un libro di storia della matematica, anche se propone di frequente degli inquadramenti storici. Dal nostro punto di vista – di autori con specifica competenza nella storia della matematica – ricostruire la genesi dei concetti è fondamentale per comprenderli a fondo, ma per questo non è necessario seguire il percorso storico in tutti i suoi passaggi accidentati e un testo introduttivo deve assumere come punto di partenza lo stato più sviluppato e sistematizzato della disciplina.

Va sottolineato che il libro è strutturato in modo tale che sia possibile seguire anche un percorso che parta dalla geometria euclidea classica per poi passare attraverso l'aritmetica prima di accedere alla geometria analitica. Quello di cui invece siamo convinti – in accordo con alcuni punti di vista circa l'insegnamento della matematica di cui parleremo nel Capitolo 13 – è che una buona introduzione alla matematica non può avere come punto di partenza l'algebra.³ Quest'ultima è uno strumento straordinariamente potente ma, dal punto di vista didattico, presenta tutti gli inconvenienti che hanno generato l'immagine repulsiva della matematica di cui si diceva prima: come tutte le materie molto tecniche, l'algebra o propone procedure relativamente semplici e ripetitive, oppure pone di fronte a difficoltà elevate e di natura superiore. Insistiamo: le porte della matematica sono l'aritmetica e la geometria.

È evidente che un libro che ha le ambizioni descritte non può limitarsi all'introduzione degli argomenti strettamente relativi all'insegnamento della matematica nelle scuole primarie, in quanto il maestro deve avere una formazione matematica più vasta di quanto richieda quel che dovrà insegnare. Nelle scuole primarie non si parla dei numeri reali, ma un maestro non potrà introdurre adeguatamente i numeri interi e razionali se non avrà un'idea chiara della problematica dei numeri nel suo complesso. Inoltre, anche le più semplici idee relative all'uso della matematica nella descrizione dei fenomeni o in contesti pratici richiedono una conoscenza di che cosa sia la matematica applicata, la modellistica, l'uso dei grafici e nozioni elementari di probabilità e di statistica. Dal punto di vista di un lettore generico – di un lettore interessato a capire che cosa siano la matematica e i suoi metodi – è evidente che è indispensabile una visione più ampia.

3. Né l'algebra elementare né, tantomeno, l'algebra moderna delle strutture. La scelta didattica di introdurre l'algebra, ovvero lo studio dei polinomi e delle equazioni algebriche, dopo la scuola primaria, è condivisa internazionalmente.

Diversi capitoli sono dedicati a una presentazione più ampia della matematica. Il Capitolo 9 è dedicato all'analisi matematica, nucleo portante della matematica moderna. Il Capitolo 10 è di carattere più concettuale e riguarda la matematica "assiomatica": è un tema che contraddistingue la visione attuale di concetti basilari, come numero e retta, cui ci si accosta per la prima volta in modo ingenuo nell'età infantile. Il Capitolo 11 introduce in modo elementare i concetti della teoria della probabilità e della statistica. Il Capitolo 12 riguarda gli sviluppi più "concreti" della matematica: la matematica applicata, la modellistica, l'analisi numerica. Infine, l'ultimo capitolo tratta dell'influsso delle concezioni moderne della matematica sull'insegnamento.

È quasi superfluo sottolineare che questo libro non pretende affatto di offrire un panorama della matematica: per fare qualcosa di minimamente esauriente in tal senso occorrerebbe almeno il triplo di queste pagine! Sono state fatte delle scelte – opinabili, come tutte le scelte – ma che hanno una motivazione precisa: presentare le tematiche fondamentali da un punto di vista elementare, soprattutto quando permettono di evidenziare come la matematica si inserisca nel tessuto della scienza, della cultura e quali siano le sue relazioni con il mondo reale.

Un discorso a parte va fatto per gli esercizi e i problemi che non possono mancare in un libro del genere, perché la matematica si apprende soltanto addestrandosi a farne un uso diretto. Pertanto, alla fine del libro verrà proposto un buon numero di esercizi suddivisi per capitolo. Tuttavia gli esercizi sono la parte di un libro che più trae vantaggio da un approccio aperto e dinamico: è utile poterne aggiungere di nuovi anche tenendo conto delle reazioni dei lettori e delle loro richieste. Ne verranno quindi inseriti periodicamente altri sul sito web della casa editrice Zanichelli.

Il libro fornisce materiali più che sufficienti per i corsi di matematica e didattica della matematica nel corso di laurea in Scienze della formazione primaria. In generale, è possibile costruire differenti percorsi di studio. Per quanto riguarda l'aritmetica, si consiglia la lettura ordinata dei Capitoli da 1 a 6. Il lettore che voglia partire dalla geometria, dopo aver letto il Capitolo 1, potrà passare al Capitolo 7 e quindi al Capitolo 8 (dopo aver letto i Capitoli dedicati all'aritmetica e i primi tre paragrafi del Capitolo 6). Gli altri Capitoli del libro sono essenzialmente autonomi. Le osservazioni storico-epistemologiche del Capitolo 10 potranno interessare il lettore "generalista" ma serviranno anche a chi ha un interesse strettamente rivolto all'insegnamento nella scuola primaria, il quale potrà omettere parti più tecniche, in particolare nei Capitoli 9, 11 e 12, e trovare riflessioni di natura didattica nel Capitolo 13. Le considerazioni relative all'insegnamento della matematica, e all'eco dei concetti matematici nel pensiero del bambino potranno interessare anche i genitori.

In ogni caso, confidiamo che il lettore – quali che siano le sue motivazioni – attribuirà la dovuta importanza a quelle parti che mostrano come la matematica non sia una disciplina isolata e "aliena", ma uno dei più grandi contributi che l'umanità abbia dato al patrimonio della conoscenza e della cultura.

Sommario

1. Che cos'è la matematica?	1
➔ 1.1. Un sapere onnipresente e temuto	1
➔ 1.2. La domanda più difficile	6
➔ 1.3. Che cosa ci insegna la storia	10
➔ 1.4. Ai primordi delle rappresentazioni simboliche	11
➔ 1.5. Ogni grande cosa può avere solo un grande inizio	17
➔ 1.6. Il mondo è matematico?	20
➔ 1.7. La perdita della certezza e gli ambigui successi della matematica moderna	21
2. Numeri naturali e sistemi di numerazione	23
➔ 2.1. La notazione simbolica dei numeri per contare	24
➔ 2.2. I nomi dei numeri	28
➤ Parole per contare	28
➤ Le parole-numero e i numeri concreti	31
➤ L'etimologia delle parole numerali: i numeri e il contare	31
➔ 2.3. La rappresentazione simbolica dei numeri nella storia: i sistemi di numerazione additivi	33
➤ La contabilità dei Sumeri e l'origine della scrittura	34
➤ I sistemi di numerazione additivi nelle antiche culture del Mediterraneo	36
➔ 2.4. Alcuni esempi storici di notazione posizionale	39
➤ Il sistema di numerazione sessagesimale babilonese	39
➤ La notazione posizionale dei numeri frazionari nell'astronomia antica	42
➤ La notazione simbolica dei numeri nell'antica Cina	43
➤ Il sistema vigesimale dei Maya	45
➤ Origine e diffusione delle cifre indiane	46
➔ 2.5. Rappresentazione simbolica dei numeri e decomposizione aritmetica	48
➤ Sistemi di numerazione posizionali e teorema di rappresentazione dei numeri interi	48
➤ La notazione posizionale dei numeri frazionari	50
➔ 2.6. La rappresentazione simbolica matematica	50
LETTURA 2.1 – La serie dei numeri nella tradizione popolare	52

3.	I numeri interi	55
➤	3.1. I numeri naturali e le operazioni	55
➤	I modelli concreti di numero	59
➤	3.2. Oltre il concetto empirico di numero naturale	60
➤	“Aggiungere uno” e il ragionamento per ricorrenza	61
➤	3.3. L’infinito dei numeri naturali: il principio di induzione	64
➤	3.4. Gli assiomi di Peano	72
➤	3.5. Una digressione sugli insiemi	75
➤	3.6. L’ordinamento dei numeri naturali	80
➤	Confronti	82
➤	Il principio del buon ordinamento	83
➤	3.7. Contare. La cardinalità di un insieme finito	84
➤	La conta e il contare	84
➤	Corrispondenza biunivoca e cardinalità	86
➤	Il contare dei bambini	88
➤	3.8. L’ampliamento del sistema dei numeri naturali	91
➤	Lo zero	92
➤	3.9. L’insieme dei numeri interi \mathbb{Z}	95
➤	Ordinamento dei numeri interi	97
	Lettura 3.1 – Sull’astrazione	99
	Lettura 3.2 – La serie infinita dei numeri. Concetto empirico e concetto razionalistico del numero	100
	Lettura 3.3 – Induzione matematica e induzione fisica	101
4.	L’aritmetica elementare	103
➤	4.1. La divisione in \mathbb{N}	103
➤	L’algoritmo euclideo del massimo comune divisore	107
➤	4.2. Congruenze e relazioni di equivalenza	110
➤	Relazioni di equivalenza	113
➤	Classi resto	113
➤	4.3. I numeri primi	116
➤	4.4. Alcuni problemi di insegnamento	121
➤	Uguaglianza: il segno =	121
➤	Scrittura dei numeri e addizione	124
➤	Sottrazione	124
➤	Moltiplicazione e divisione	125
	Appendice 4.1 – Altre forme del principio di induzione	126
	Lettura 4.1 – Pitagora e il suo tempo	127
	Lettura 4.2 – I numeri primi e il ragionamento per assurdo	127

5.	I numeri razionali	129
➔	5.1. Parti, rapporti, misure	129
➤	Nuovi simboli per le quantità frazionarie	129
➤	Rapporto e proporzione	133
➔	5.2. Frazioni e decimali	137
➤	I molti significati della notazione frazionaria	137
➤	Percentuali	139
➤	La frazione come numero	140
➤	I numeri decimali: la rappresentazione posizionale dei numeri frazionari	143
➤	Espressioni decimali periodiche	145
➔	5.3. La costruzione dell'insieme \mathbb{Q} dei numeri razionali come ampliamento di \mathbb{Z}	147
➤	Le operazioni con i numeri razionali	149
➔	5.4. L'ordinamento dei numeri razionali. Interpretazione geometrica	151
➤	Numeri razionali positivi e negativi	152
➤	L'ordinamento totale di \mathbb{Q}	152
6.	I numeri reali e il continuo	155
➔	6.1. La matematica o le matematiche?	155
➔	6.2. Pitagora e l'incommensurabilità	158
➔	6.3. Zenone e i paradossi dell'infinito	163
➔	6.4. La costruzione dei numeri reali	166
➔	6.5. La teoria degli insiemi e gli infiniti	172
7.	Il pensiero geometrico e la geometria euclidea	179
➔	7.1. Lo sguardo della geometria	179
➔	7.2. Le origini antiche dei concetti geometrici	185
➤	La geometria nell'arte	190
➔	7.3. Punto, linea, piano: le forme nella geometria euclidea	191
➤	Le figure piane	195
➤	Le figure solide	198
➤	La congruenza delle figure	199
➔	7.4. Le costruzioni con riga e compasso e i postulati della geometria euclidea	201
➤	Rette e cerchi	203
➤	Il postulato delle parallele	206
➔	7.5. Gli assiomi di Hilbert per la geometria euclidea	208

➤ 7.6. I teoremi della geometria euclidea	211
➤ Uguaglianza di figure piane	211
➤ Rette perpendicolari e parallele	215
➤ I triangoli	220
➤ Equivalenza di figure piane	221
➤ Il metodo della dimostrazione	225
➤ Figure simili e proporzionalità geometrica	226
➤ Geometria solida	231
Letture 7.1 – La geometria e l'esperienza	235
Letture 7.2 – «Lo fren dell'arte»	235
8. Algebra, geometria e il concetto di spazio	237
➤ 8.1. Sistemi di coordinate	237
➤ Lo spazio euclideo reale tridimensionale	239
➤ Il piano euclideo reale	243
➤ 8.2. Lo spazio geometrico astratto	248
➤ Algebra e geometria	250
➤ Proiezioni	254
➤ 8.3. Isometrie e similitudini nello spazio geometrico euclideo	255
➤ Le isometrie nel piano euclideo reale	258
➤ Simmetrie	263
➤ Similitudini	265
➤ 8.4. Geometrie e gruppi di trasformazioni	267
➤ 8.5. Geometria, intuizione ed esperienza a scuola	277
➤ La geometria nella cultura	278
➤ La geometria euclidea sintetica come orizzonte dell'esperienza	279
➤ Fra numeri e geometria: misura e posizione	281
➤ Lo spazio	282
Letture 8.1 – Spostamenti, deformazioni e le leggi di composizione	284
Letture 8.2 – Confronto tra il linguaggio ordinario, il linguaggio della geometria e dell'algebra	285
9. L'analisi matematica	287
➤ 9.1. La matematica nello studio della natura	287
➤ 9.2. Funzioni	290
➤ L'idea di funzione a scuola	303
➤ 9.3. Limiti, derivate, continuità	305
➤ 9.4. Aree e integrali	315
➤ 9.5. Le equazioni differenziali	322

➔ 9.6. Il vasto mondo dell'analisi matematica	332
Lettura 9.1 – La nuova fisica e la nuova matematica	334
Lettura 9.2 – L'analisi matematica è estesa quanto la natura	335
Lettura 9.3 – L'analisi matematica è il fondamento delle applicazioni pratiche esatte	337
10. La matematica assiomatica	339
➔ 10.1. Il "rigore" in matematica	339
➔ 10.2. L'algebra astratta e il movimento assiomatico	343
➔ 10.3. Hilbert: assiomatica e formalismo	351
➔ 10.4. Le "strutture" in matematica	355
Appendice 10.1 – I numeri complessi	360
11. Probabilità	363
➔ 11.1. Il caso	363
➔ 11.2. Il concetto di probabilità e le sue definizioni	369
➔ 11.3. Le formule elementari e alcune applicazioni	379
➤ Probabilità condizionata	382
➤ Probabilità inversa	385
➤ Variabili aleatorie	388
➤ Caratteristiche di posizione	390
➤ Lotterie	392
➔ 11.4. La statistica	394
Appendice 11.1 – Elementi di calcolo combinatorio	409
Lettura 11.1 – Determinismo e probabilità	412
Lettura 11.2 – Probabilità e questioni morali	414
Lettura 11.3 – La statistica	415
12. La matematica applicata e la modellistica	417
➔ 12.1. Matematica, scienza e tecnologia	417
➔ 12.2. L'analisi numerica: approssimazione ed errore	423
➤ Algoritmi e approssimazione nell'istruzione matematica elementare	430
➔ 12.3. Che cos'è la modellistica matematica?	433
➔ 12.4. La matematica dei conflitti: la teoria dei giochi	445
➔ 12.5. Il mondo è matematico?	455
Lettura 12.1 – Il calcolatore non può sostituire la matematica "mentale"	458
Lettura 12.2 – Il delicato equilibrio tra matematica pura e applicata	459

13. Restituire la matematica alla cultura	461
➤ 13.1. Una matematica per tutti: scopo formativo e scopo utilitarario	463
➤ 13.2. Abbasso Euclide! La matematica moderna a scuola	469
➤ 13.3. La mente matematica del bambino	472
➤ 13.4. Per concludere	475
14. Esercizi	479
Bibliografia	507
Indice analitico	517